www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1990 **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES** **Options M et P'**

DURÉE : 2 heures

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les suites réelles définies par les relations de récurrence (1) suivantes : x désigne un réel strictement supérieur à 1.

$$(1)\qquad S_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\quad C_0 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\quad C_{n+1} = \sqrt{\frac{(1 + C_n)}{2}}\quad S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}}\quad \text{et}\quad T_n = \frac{S_n}{C_n}.$$

I *a.* On pose $\varphi = \ln x$ où ln désigne le logarithme népérien.

Montrer que pour tout naturel n, on a $S_n = 2^n \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2^n}$ et $T_n = 2^n \operatorname{th} \frac{\varphi}{2^n}$.

En déduire que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers $\ln x$. De plus, pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n$.

b. Dans le cas où x est égal à 2, donner un algorithme, utilisant (1) et permettant d'obtenir les valeurs S_n et T_n lorsque n est élément de l'intervalle $[0,10]$. Cet algorithme sera rédigé soit en français, soit en Pascal.

c. Donner, sous forme de tableau, les valeurs de S_n, T_n et $S_n - T_n$ lorsque n est élément de $[0,10]$ et que x est égal à 2.

II Dans cette partie, on considère les suites $\left(\frac{a S_n + b T_n}{a + b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par les relations (1).

a. Montrer que les suites $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a + b \neq 0$ et $W_n = \frac{a S_n + b T_n}{a + b}$ sont convergentes vers $\ln x$ et donner un équivalent de $\ln x - W_n$.

Montrer qu'il existe un choix de a et de b, un réel λ et une suite, notée u_n, correspondant à ce choix tels que $u_n - \ln x \sim \frac{\lambda}{16^n}$.

Préciser a, b, λ et u_n.

b. Donner sous forme de tableau les valeurs de S_n, T_n et u_n pour n élément de $[1,4]$ et x, réel égal à 2. Expliquer les résultats de la dernière colonne de ce tableau en utilisant l'équivalent de : $u_n - \ln x$.

III Dans cette partie, on accélère la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la méthode de Richardson. On est ainsi conduit à construire les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$x_n = \frac{4 S_{n+1} - S_n}{3},\qquad y_n = \frac{16 x_{n+1} - x_n}{15}\qquad \text{et}\qquad z_n = \frac{64 y_{n+1} - y_n}{63}.$$

a. En utilisant le développement limité de sh x à l'ordre 9 au voisinage de 0, montrer qu'il existe des constantes α, β, γ telles que :

$$x_n = \ln x + \frac{\alpha}{16^n} + \frac{\beta}{64^n} + \frac{\gamma}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$$

puis des constantes α' et β' telles que $y_n = \ln x + \frac{\alpha'}{64^n} + \frac{\beta'}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$

ainsi qu'une constante α'' telle que $z_n = \ln x + \frac{\alpha''}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$

On ne demande pas de déterminer les valeurs des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ et α''.

b. Lorsque x est égal à 2, donner sous forme de tableau, lorsque n est élément de l'intervalle $[1,4]$ les valeurs correspondantes des suites x_n, y_n et z_n, calculées à partir de celles de S_n.

Expliquer pourquoi x_1 donne une valeur approchée de ln 2 avec huit décimales.

c. Écrire un programme Pascal permettant d'obtenir le tableau suivant demandé au III.*b.*

On utilisera une variable A déclarée de la façon suivante :

var A : Array [1..4 , 1..4] of real; .

n	S_n	x_n	y_n	z_n
1	S_1	x_1	y_1	z_1
2	S_2	x_2	y_2	
3	S_3	x_3		
4	S_4			

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail